Corrigé (2022 – Métropole – septembre – jour 1)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
L'axe des abscisses est asymptote horizontale au graphe de la fonction f au voisinage de plus l'infini.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. En dérivant $f(x)$ comme un quotient, on obtient pour $x \geqslant 1$:
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - 1\times\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

b. Quel que soit x, $x^2 \geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur $1-\ln x$:

- $1-\ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \mathrm{e} > x$: $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$;
- $1-\ln x < 0 \iff 1 < \ln x \iff \mathrm{e} < x$: $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.
- $1-\ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff \mathrm{e} = x$.

On a donc le tableau de signes de $f'(x)$:

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

c. $f(1) = 0$ et $f(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$; on dresse le tableau de variations de la fonction f sur $[1\,;\,+\infty[$.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

3. **a.** D'après le tableau de variations sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$, la fonction est strictement croissante de 0 à $\frac{1}{\mathrm{e}}$: l'équation $f(x) = k$ avec $0 \leqslant k \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$ a donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires une solution unique.

b. D'après le tableau de variations $f(x) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$ (maximum de f) : l'équation $f(x) = k$ avec $k > \frac{1}{\mathrm{e}}$ n'a donc pas de solution

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = \mathrm{e}^{\frac{u_n}{4}}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}$: produit de deux facteurs supérieurs à zéro, cette dérivée est supérieure à zéro, donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$.

- *Initialisation*
  $u_0 = 1$ et $u_1 = \mathrm{e}^{u_0} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. On a bien : $u_0 \leqslant u_1 \leqslant \mathrm{e}$; la propriété est vraie pour $n = 0$.
- *Hérédité*
  Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$.
  Par croissance de la fonction g, on a : $g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(\mathrm{e})$ soit
  $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant g(\mathrm{e})$
  Or $g(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}}{4}} \approx 1{,}97$; donc $g(\mathrm{e}) \leqslant \mathrm{e}$ et l'encadrement précédent devient :
  $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \mathrm{e}$: la propriété est vraie au rang $n+1$.
- *Conclusion*
  L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il est vrai au rang $n+1$; d'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$.

3. L'encadrement précédent montre :

— que la suite (u_n) est croissante;
— que la suite (u_n) est majorée par e.

Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite inférieure ou égale à e.

On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ est solution de l'équation : $\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = x$.

4. Quel que soit $x > 0$, $\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = x \iff \dfrac{x}{4} = \ln x$, par croissance de la fonction ln.

Or $\dfrac{x}{4} = \ln x \iff \dfrac{1}{4} = \dfrac{\ln x}{x}$, soit finalement : $f(x) = \dfrac{1}{4}$ avec f fonction définie dans la partie A.

5. On a : $\mathrm{e} < 4$ donc $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

D'après la question **3. a.** de la partie A, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$ a donc une solution unique sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$.

La calculatrice donne : $f(1) = 0$ et $f(2) = \dfrac{\ln 2}{2} \approx 0{,}346$;
$f(1{,}4) \approx 0{,}24$ et $f(1{,}5) \approx 0{,}27$, donc $1{,}4 < \ell < 1{,}5$;
$f(1{,}42) \approx 0{,}247$ et $f(1{,}43) \approx 0{,}251$, donc $1{,}42 < \ell < 1{,}43$;
$f(1{,}429) \approx 0{,}2498$ et $f(1{,}430) \approx 0{,}2501$, donc $1{,}429 < \ell < 1{,}430$;
Finalement $\ell \approx 1{,}43$ au centième près.